

TD 8 : Primitives, intégrales Indications

Techniques d'intégration

1 ★★ (En passant par une primitive) En déterminant une primitive, calculer les intégrales suivantes :

1) $\int_1^2 x e^{-3x^2} dx$

4) $\int_{-2}^{-1} \frac{2x+3}{x-1} dx$

2) $\int_0^1 \frac{x}{1+x^2} dx$

5) $\int_{-1}^1 \frac{x^2}{1+x^2} dx$

3) $\int_1^4 \frac{1}{x\sqrt{x}} dx$

6) $\int_0^1 x\sqrt{1+x^2} dx$

Utiliser les formules de primitivation classiques telles que $\int u' e^u = e^u$. Parfois, il faudra aussi faire des réécritures du type $+1 - 1$ ou $\frac{1}{1}$.

2 ★★ (Intégration par parties) Calculer les intégrales suivantes par une IPP :

$\mathcal{I}_1 = \int_0^1 \arctan x dx$

$\mathcal{I}_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos(4x) dx$

$\mathcal{I}_3 = \int_0^1 \ln(1+x^2) dx$

$\mathcal{I}_4 = \int_0^{\ln 2} (3x+1)^2 e^{-4x} dx$

Il faut deux fonctions pour une IPP. S'il n'y a qu'une seule fonction, la seconde fonction peut être prise comme étant $x \mapsto 1$.

3 ★★ (Changement de variables) En utilisant un changement de variable, calculer les intégrales suivantes :

$\mathcal{I}_1 = \int_1^3 \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}}$ en posant $u = \sqrt{x}$

$\mathcal{I}_2 = \int_3^4 \frac{dx}{x\sqrt{x-2}}$ en posant $z = \sqrt{x-2}$

$\mathcal{I}_3 = \int_1^{\sqrt{3}} \frac{dt}{(1+t^2)\sqrt{1+t^2}}$ en posant $t = \tan u$

$\mathcal{I}_4 = \int_0^{\frac{e-e^{-1}}{2}} \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx$ en posant $x = \operatorname{sh} t$

$\mathcal{I}_5 = \int_0^1 \sqrt{1+x} dx$ à vous de trouver

$\mathcal{I}_6 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{1+\cos x} dx$ à vous de trouver

Pour trouver le bon changement de variable, il faut (quitte à faire des réécritures), identifier une fonction $u = \varphi(x)$ et faire en sorte que $u'(x) = \varphi'(x)$ soit en facteur de dx .

4 ★★ (Intégrales de fractions rationnelles) Calculer les intégrales suivantes :

1) $\int_0^1 \frac{4}{x^2-4x+4} dx$

3) $\int_6^8 \frac{dt}{t^2-4t-5}$

2) $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dt}{1-t^2}$

4) $\int_0^{\frac{5}{2}} \frac{dx}{8x^2+50}$

Suivre la méthode du cours.

5 ★★ (Équations et intégrales)

1) On pose $\mathcal{I} = \int_0^{2\pi} \sin x \operatorname{sh} x dx$. Faire deux intégrations par parties pour obtenir une équation sur $\mathcal{I}$. Calculer $\mathcal{I}$.

2) Pour tout $x > 1$, on pose $\mathcal{I}(x) = \int_1^x \sin(\ln t) dt$. Par la même méthode, calculer $\mathcal{I}(x)$. En déduire une primitive de $t \mapsto \sin(\ln t)$ sur $]1, +\infty[$.

- 1) Obtenir une équation vérifiée par $\mathcal{I}$ après les deux IPP.
- 2) Une fois $\mathcal{I}(x)$ calculé, utiliser le théorème fondamental de l'analyse.

Calcul de primitives

6 ★★ (Trouver une primitive) Déterminer, sur un intervalle approprié, une primitive des fonctions suivantes. On pourra notamment passer par l'écriture $\int^x f(t)dt$ et éventuellement faire des changements de variables du type $u = \varphi(t)$.

- | | |
|--|--|
| 1) $x \mapsto \frac{1}{x \ln x}$ | 6) $x \mapsto \frac{\ln x}{4x}$ |
| 2) $x \mapsto x\sqrt{1+x^2}$ | 7) $x \mapsto \frac{x}{\sqrt{x^2+2}}$ |
| 3) $x \mapsto \frac{\tan x}{\cos^2 x}$ | 8) $x \mapsto \frac{e^x}{1+e^{2x}}$ |
| 4) $x \mapsto \cos x \sin^3 x$ | 9) $x \mapsto \sin(2x) \cos^2 x$ |
| 5) $x \mapsto \frac{\sin(2x)}{\cos^3(2x)}$ | 10) $x \mapsto \frac{1}{x^2} \ln(1-x^2)$ |

Ne pas hésiter à passer par l'écriture $\int^x f(t)dt$ et à faire un changement de variable, notamment $u = 2t$ pour simplifier le calcul de primitive.

7 ★★ (Trouver toutes les primitives) Déterminer toutes les primitives des fonctions suivantes :

- 1) $f : x \mapsto \sin(3x)$ sur $\mathbb{R}$
- 2) $g : x \mapsto |x|$ sur $\mathbb{R}$
- 3) $h : x \mapsto \frac{1}{|x|}$ sur $\mathbb{R}^*$

Le TFA permet de trouver une primitive sur tout intervalle où les fonctions f , g ou h sont définies.

Règles de Bioche

8 ★★★ (Règles de Bioche) En utilisant les règles de Bioche, calculer les intégrales suivantes :

- | | |
|--|--|
| 1) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{1+\cos x} dx$ | 3) $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{1+\sin^2 x} dx$ |
| 2) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos t} dt$ | 4) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x}{\sin^2 x - \cos^2 x} dx$ |

Il faut se baser sur la partie "Compléments" du chapitre 10 pour trouver le bon changement de variable.

9 ★★ En posant $u = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$, calculer les intégrales suivantes :

- | | |
|---|---|
| 1) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{2+\cos x}$ | 3) $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\cos x} dx$ |
| 2) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{2-\sin x}$ | 4) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\sin x - \cos x + \sqrt{2}}$ |

En posant $t = \tan \frac{x}{2}$, on a $dt = \frac{1}{2} \left(1 + \tan^2 \frac{x}{2}\right) dx$ et donc en renversant la relation, on obtient :

$$dx = \frac{2}{1+t^2} dt$$

À vous de jouer

10 ★★ (Calcul d'intégrales) Calculer les intégrales suivantes :

- | | |
|--|--|
| 1) $\int_2^5 \frac{x}{1-x^2} dx$ | 6) $\int_1^{e^\pi} \sin(\ln x) dx$ |
| 2) $\int_0^{2\pi} e^{i\theta} d\theta$ | 7) $\int_0^{\ln 2} \operatorname{sh}^3 x dx$ |
| 3) $\int_1^4 \frac{dx}{x+\sqrt{x}}$ | 8) $\int_0^\pi e^{ix} \sin x dx$ |
| 4) $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \tan^2 x \cos^5 x dx$ | 9) $\int_1^8 \frac{(\sqrt{x}-1)^2}{\sqrt[3]{x}} dx$ |
| 5) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{2-x^2}}$ | 10) $\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \sin^8 x \tan x dx$ |

11) $\int_1^e \frac{(\ln x)^n}{x} dx$ où $n \in \mathbb{N}^*$

Se référer aux différentes méthodes à la fin du poly de cours.

11 ★★★ Soit $a, b \in \mathbb{R}$ et $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. Calculer

$$\int_a^b \frac{dt}{t - \alpha}$$

Séparer partie réelle et partie imaginaire

12 ★★ Sans faire d'étude de fonctions, en utilisant la croissance de l'intégrale montrer que :

- 1) Pour tout $x \geq 0$, on a $\sin x \leq x$.
- 2) Pour tout $x \geq 0$, on a $\cos x \geq 1 - \frac{x^2}{2}$.
- 3) Pour tout $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, on a $\tan x \geq x$.

- 0) Fixer $x \geq 0$. Si f et g sont deux fonctions définies sur $[0, x]$ et qui vérifient $f(t) \leq g(t)$ pour tout $t \in [0, x]$, alors $\int_0^x f(t) dt \leq \int_0^x g(t) dt$.
- 0) Suivre le même principe, mais vous pouvez utiliser la question précédente !

13 ★★★ (Intégrales de Wallis) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t dt$$

- 1) Calculer I_0 et I_1 .
- 2) Déterminer une relation de récurrence entre I_{n+2} et I_n .
- 3) En déduire la valeur de I_n .

14 ★★★ Montrer que :

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{\cos x + \sin x} dx = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{\cos x + \sin x} dx = \frac{\pi}{4}$$

En déduire $\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}+t}$.

Faire un changement de variable $u = \frac{\pi}{2} - x$.

- 1) C'est un calcul direct
- 2) Écrire $\sin^2 t = 1 - \cos^2 t$ puis faire une intégration par parties judicieuses pour exprimer I_{n+2} en fonction de I_n et I_{n+2}
- 3) Trouver une formule par la question 2, puis la démontrer par récurrence.